第三次作业反馈

(2024-2025-1)-MATH1405H-02

Monday 21st October, 2024

目录

1 第一题解答 1

2 第二题解答 3

3 “挑战题” 解答 5

1 第一题解答

矩阵的零空间, 解空间, 秩, 以及相抵等性质与域的选取无关.

备注. 一个常见的错误是出现 $\frac{1}{2}$. 在一般的域中, 能否定义 $\frac{1}{2}$?

问题 1.1. 交换 A 的 $[i, j]$ 两行, 等价于左乘一个矩阵 $S_{i,j}$. 写出该矩阵.
解答 假定 $i < j$. 以下斜逗号 $\ddots$ 处为 1, 空白处为 0.

$$\begin{array}{r} \\ \\ \text{行 } i \to \\ \\ \text{行 } j \to \\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix}1 &&&&&& \\ &\ddots&&&&& \\ &&0&&1&& \\ &&&\ddots&&& \\ &&1&&0&& \\ &&&&&\ddots& \\ &&&&&&1\end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

简化地, $S_{i,j} = I - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i}$.

问题 1.2. 将 A 第 k 行的各项同时乘上一个非零常数 λ, 等价于左乘一个矩阵 D_k^λ. 写出该矩阵.
解答 以下斜逗号 $\ddots$ 处为 1, 空白处为 0.

$$\begin{array}{r} \\ \\ \text{行} k \to \\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix}1 &&&& \\ &\ddots&&& \\ &&\lambda&& \\ &&&\ddots& \\ &&&&1\end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

简化地, $D_k^\lambda = I + (\lambda - 1)E_{k,k}$.

问题 1.3. 向 A 的第 j 行加上其第 i 行的 λ 倍 (这一过程仅改变第 j 行, 其他行不变), 等价于左乘一个矩阵 $T_{i,j}^\lambda$. 写出该矩阵.
解答 不妨设 $i < j$. 以下斜逗号 $\ddots$ 处为 1, 空白处为 0.

$$\begin{array}{r} \\ \\ \text{行} i \to \\ \\ \text{行} j \to \\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix}1 &&&&&& \\ &\ddots&&&&& \\ &&1&&&& \\ &&&\ddots&&& \\ &&\lambda&&1&& \\ &&&&&\ddots& \\ &&&&&&1\end{pmatrix}. \tag{1.3}$$

简化地, $T_{i,j}^\lambda = I + \lambda E_{j,i}$.

问题 1.4. 求逆变换 (逆矩阵) $S_{i,j}^{-1}$, $(D_k^\lambda)^{-1}$, 以及 $(T_{i,j}^\lambda)^{-1}$.
解答 依次解答如下.

1. 注意到 $(S_{i,j})^2 = I$, 故 $S_{i,j}^{-1} = S_{i,j}$.
2. 注意到 $(D_k^\lambda)^{-1} = D_k^{1/\lambda}$.
3. 注意到 $(T_{i,j}^\lambda)^{-1} = T_{i,j}^{-\lambda}$.

问题 1.5. 使用自然语言描述这三类逆变换.
解答 依次回答如下.

1. $S_{i,j}^{-1}$ 的定义: 换回 $[i,j]$ 两行, 也就是交换矩阵的 $[i,j]$ 两行.
2. $(D_k^\lambda)^{-1}$ 的定义: 将矩阵的第 k 行由数乘后的结果复原, 也就是在第 k 行各项同时乘上非零常数 $1/\lambda$.
3. $(T_{i,j}^\lambda)^{-1}$ 的定义: 在矩阵的第 j 行中剔除第 i 行的 λ 倍, 也就是向 A 的第 j 行加上其第 i 行的 $-\lambda$ 倍 (这一过程仅改变第 j 行, 其他行不变).

问题 1.6. 求 $S_{i,j}S_{k,l} = S_{k,l}S_{i,j}$ 的充要条件.
解答 由构造, $S_{i,j}$ 与 $S_{j,i}$ 无区别, $S_{i,i} = I$. 为找到以上两个矩阵乘积不交换的充要条件, 只需讨论 $i \neq j$ 且 $k \neq l$ 的三种情形.

1. (i,j,k,l) 两两不等.
2. (i,j,k) 两两不等, $i = l$.
3. $i = k$ 且 $j = l$.

只有第二种情形是非交换的. 记 $|S|$ 为有限集的大小, 则第二种情况等价于

$$|\{i,j\}| = 2 \text{ 且 } |\{k,l\}| = 2 \text{ 且 } |\{i,j,k,l\}| = 3. \tag{1.4}$$

换言之, 以上乘积可交换的充要条件是

- 两个矩阵的 “作用范围” 全不交, 或一者包含另一者.

问题 1.7. 求 $T_{i,j}^\lambda T_{k,l}^\mu = T_{k,l}^\mu T_{i,j}^\lambda$ 的充要条件.
解答 依照 $T_{i,j}^\lambda = I + \lambda E_{j,i}$, 得

$$T_{i,j}^\lambda T_{k,l}^\mu - T_{k,l}^\mu T_{i,j}^\lambda = (I + \lambda E_{j,i})(I + \mu E_{l,k}) - (I + \mu E_{l,k})(I + \lambda E_{j,i}) \tag{1.5}$$

$$= \lambda\mu(E_{j,i}E_{l,k} - E_{l,k}E_{j,i}). \tag{1.6}$$

上式为 0 的充要条件是以下任意一者成立:

1. $\lambda\mu = 0$;
2. $i \neq j$ 且 $k \neq j$ (两处 0 相减);
3. $i = j = k = l$ (两处 1 相减).

问题 1.8. 以上给出了三类矩阵. 能否通过某两类矩阵得到第三类? 请讨论这三种情况 (构造或给出反例).

- 另注: “给出反例” 的本质还是证明. 原问题表述欠妥.

解答 S 类能通过 T 类与 D 类得到, 其机理类似赋值 $(a,b) := (b,a)$. 记

$$A := D_i^{-1} \cdot T_{i,j}^1 \cdot T_{j,i}^{-1} \cdot T_{i,j}^1, \tag{1.7}$$

此时 A 的左乘表现为以下的映射的合成:

$$(x_i, y_j) \xrightarrow{T_{i,j}^1} (x_i, x_i + y_j) \xrightarrow{T_{j,i}^{-1}} (-y_j, x_i + y_j) \xrightarrow{T_{i,j}^1} (-y_j, x_i) \xrightarrow{D_i^{-1}} (y_j, x_i). \tag{1.8}$$

T 类不能通过 S 类与 D 类得到. 因为 S 类矩阵与 D 类矩阵的任意乘积都至少有 $n^2 - n$ 个零.
若假定 $T_{i,i}^\lambda$ 是合法的, 则 D 类矩阵能通过 S 类与 T 类得到. 因为 $D_i^\lambda = T_{i,i}^{\lambda-1}$.
若假定 $T_{i,i}^\lambda$ 是非法的 (假定 $n \geq 2$), 则有且仅有行列式为 ± 1 的 D 类矩阵能被其余两类矩阵表示. 对行列式为 -1 的 D 类矩阵进行如下 S-类与 T-类的初等行变换即可:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.9}$$

若 D 类矩阵的行列式不为 ± 1, 则其无法通过 S 类与 T 类矩阵的乘积得到. 因为 $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

- 对于二元域或三元域上的矩阵, D 类矩阵可以通过其他两类矩阵得到.

问题 1.9. 假定 A 是方阵. 将以上 $S_{i,j}$, $T_{i,j}$ 与 D_k 乘在 A 的右侧, 效果如何?
解答 解答如下.

1. $S_{i,j}$ 右乘: 交换 A 的 i 列与 j 列;
2. $T_{i,j}^\lambda$ 右乘: 将 i 列的 λ 倍加至 j 列;
3. D_k^λ 右乘: 将第 k 列乘以 λ.

2 第二题解答

问题 2.1. 给定矩阵 A, 其最简行阶梯形 R 为何唯一?
解答 见下一问.

问题 2.2. (接上一小问) 尝试给出一个不用计算的证明 (无字证明).
解答 从 A 到 $\mathrm{rref}(A)$ 可通过 "改写矩阵各列" 实现, 无需进行复杂的初等行变换.
以下算法从左往右地读取 A 的各列, 并逐列给出 $\mathrm{rref}(A)$. 记 A 共有 n 列, 且第 k 列为向量 v_k.

输入: 矩阵 A 各列 $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$;

输出: 最简行阶梯形 $\mathrm{rref}(A)$ 各列 $\{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$.

对于 $k = 1, 2, \ldots, (A$ 的列数$)$.

若 $v_k \in \mathrm{Span}(\{v_k\}_{t<k})$, 则 c_k 的坐标由 $\{c_t\}_{t<k}$ 唯一确定.

若不然, 则取 c_k 是为 $\{0,1\}$-向量 e_{t+1}, 其中 $t = \dim \mathrm{Span}(\{v_k\}_{t<k})$.

注: 请回忆 $\mathrm{Span}(\varnothing) = 0$, 从而以上算法是精简且统一的. 空集起到了 `void` 的效果.

问题 2.3. 转置矩阵 R^T 的最简行阶梯形是什么?
解答 这等价于说, 先在 R 中消去所有 1 (阶梯拐角) 右侧的项, 再将所有零向量移至非零向量的右侧. 因此, R^T 的最简阶梯型是

$$\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

问题 2.4. 证明相抵标准型的存在性: 对任意矩阵 A, 存在可逆矩阵 P 和 Q 使得

$$A = P \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Q. \tag{2.2}$$

以上, I_r 是 r 阶单位矩阵, O 表示数字 0 出现的位置.
注意: 中间的 $(0,1)$-矩阵兼并了以下三类退化矩阵

$$\begin{pmatrix} I_r & O \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} I_r \\ O \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} I_r \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

解答 上一问已给出答案.

问题 2.5. 证明以上的 r 由 A 唯一决定. 作为推论, 矩阵的行秩等于列秩. 往后统一称作秩.

> 此类分解不必来自矩阵的初等行列变换, 从而不能使用消元法的唯一性证明.
> 在证明相抵标准型的唯一性之前, 使用各类 "秩不等式" 或有循环论证之嫌.
> 最好的方法是反证法.

解答 若存在可逆的 P_1, P_2, Q_1, Q_2 使得

$$A = P_1 \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Q_1 = P_2 \begin{pmatrix} I_s & O \\ O & O \end{pmatrix} Q_2. \tag{2.4}$$

若 $r < s$, 改写等式得

$$P_2^{-1} P_1 \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Q_1 Q_2^{-1} = \begin{pmatrix} I_s & O \\ O & O \end{pmatrix}. \tag{2.5}$$

考虑 $\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r \\ O \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_r & O \end{pmatrix}$, 则上式改写作

$$M \cdot N = \begin{pmatrix} I_s & O \\ O & O \end{pmatrix} \quad (M \in \mathbb{F}^{m\times r},\ N \in \mathbb{F}^{r\times n}). \tag{2.6}$$

将矩阵左乘视作 $\mathbb{F}^n$ 至 $\mathbb{F}^m$ 的线性映射, 则

- 左乘 $M \cdot N$ 必然将 s 个线性无关的行向量映作线性相关组 (因为 N 总共仅有 r 行);
- 考虑 $\{e_1, \dots, e_s\}$, 则左乘 $\begin{pmatrix} I_s & O \\ O & O \end{pmatrix}$ 保持这一线性无关组.

综上, 原等式矛盾. 因此 $r \geq s$. 类似的论证给出 $r \leq s$, 从而 $r = s$.

3 “挑战题”解答

问题 3.1. 若整数矩阵 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 满足 $ad - bc = 1$, 则 A 是以下几类矩阵的有限乘积

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

解答 依题设, 直接得到 T^k $(k \in \mathbb{Z})$. 因此可以将 A 第二行的任意倍数加至第一行. 计算得

$$STS = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad ST^{-1}S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

因此可以将 A 第一行的任意倍数加至第二行. 若考虑右乘, 则可以将 A 某列的任意倍数加至另一列. 同时, S 起到了行置换与列置换的作用.

- 若 A 不存在 0, 则不妨设 A 的第一列非零. 依照行列式, 该列的两数互质. 通过上述变换, 可将 A 中某项消作 0.
- 若 A 中存在一个 0, 则可以通过上述变换将 A 变作上三角矩阵. 依照行列式, 两个对角元只能是 ± 1. 依照初等变换, 可以将 A 变作对角矩阵.
- 若 A 中存在两个零, 则 S 或 SA 是对角矩阵. 最后依照 $S^2 = -I$, 明所欲证.