# 习题: 矩阵的秩

(2024-2025-1)-MATH1405H-02

Monday 29$^{\text{th}}$ September, 2025

## 目录

## 0.1 行满秩, 列满射

**定理.** 将矩阵视作线性映射, 则秩是像的维数. 换言之,

$$r(A) = \dim(C(A)) = \dim(C(A^T)). \tag{0.1}$$

**定义** (行满秩)**.** 称 $A$ 是行满秩的, $A$ 的所有行线性无关.

习题 **1** (行满秩的等价定义)**.** 使用相抵标准型之类的技巧, 证明以下关于矩阵 $A$ 的命题等价.

1. $A$ 是行满秩的, 即, $A$ 的所有行线性无关.
2. 存在 $B$ 使得 $AB$ 是单位矩阵. 此时, $B$ 称作右逆元.
3. 对任意同规格且允许右乘 $A$ 的矩阵 $X$ 与 $Y$, 总有 $XA = YA$ 当且仅当 $X = Y$.
4. 对任意可乘的向量 $x$, $x^T A = 0$ 当且仅当 $x = 0$.
5. 存在矩阵 $B$ (有时 $B = \varnothing$) 使得 $\binom{A}{B}$ 是可逆矩阵.

**例子.** 假定所有的矩阵乘法式与分块矩阵是合法的. 证明以下问题.

1. 若 $A$ 与 $B$ 行满秩, 则 $AB$ 亦然.
2. 若 $AB$ 行满秩, 则 $A$ 亦然.
3. 若 $A$ 行满秩, 则 $(A \quad B)$ 亦然.
4. 若 $\binom{A}{B}$ 行满秩, 则 $A$ 与 $B$ 亦然.
5. 分块阵 $\left(\begin{smallmatrix} A & O \\ O & B \end{smallmatrix}\right)$ 行满秩, 当且仅当 $A$ 与 $B$ 均行满秩.

对列满秩矩阵, 上述结论如何变化? (自行检验即可.)

*备注.* 左乘行满秩矩阵类似满射. 此处的满射是对集合, 交换群, 群, 线性空间等而言的.

1. 若 $f$ 与 $g$ 是满射, 则 $f \circ g$ 亦然.
2. 若 $f \circ g$ 满射, 则 $f$ 亦然.
3. 若 $f_1 : X_1 \to Y$ 是满射, 则对任意 $f_2 : X_2 \to Y$, 复合 $X_1 \sqcup X_2 \xrightarrow{(f_1, f_2)} Y$ 亦然.
4. 若 $\binom{f_1}{f_2} : X \to Y_1 \times Y_2$ 是满射, 则 $f_1$ 与 $f_2$ 亦然.
5. 略.

类似地, 右乘行满秩矩阵类似单射. 细节从略.

## 0.2 常用技巧: 完全平方

**例子.** 此例假定 $\mathbb{Q} \subset \mathbb{F} \subset \mathbb{C}$, 定义 $A^H = (\overline{a_{j,i}})$ 是矩阵的共轭转置. 则

$$N(A) = N(A^H A) = N(AA^H A) = N(A^H AA^H A) = \cdots . \tag{0.2}$$

第一个等式的证明如下:

1. 若 $Ax = 0$, 则 $A^H Ax = 0$; 反之,
2. 若 $A^H Ax = 0$, 则 $x^H A^H Ax = \|Ax\|^2 = 0$, 从而 $Ax = 0$.

每处等式都能归纳地得到.

习题 **2.** 固定数域上的矩阵 $A$. 称 $B$ 为 "好矩阵", 若 $B$ 是有限个 $A$ 与 $A^H$ 的交错积. 证明任意两个好矩阵的秩相同.

备注. $A(A - A^H) = O$ 当且仅当 $A = A^H$. 这是另一份文件的习题, 也是 2023 年的第一次小测题.

**命题.** 左乘矩阵不降低零空间的维数, 从而不增加秩.

**命题.** 若数域上的矩阵满足 $M^2 = O$, 则 $r(M + M^T) = 2 \cdot r(M)$.

- 我们将这一原理及其推广留至内积空间的重要应用: Hodge 分解.

这一结论是 "几何的", 毕竟有限域上处处存在反例.

## 0.3 秩不等式

**习题 3.** (Bonus) 以下是秩的比较, 每一箭头朝向秩更大者. 哪些箭头是缺失的? 我没能看出更多.

$$\begin{tikzcd}
 & & & r(A+B) \arrow[r] \arrow[dr] & r\left(\begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix}\right) \arrow[dr] & & \\
r(AB) \arrow[r] & \min(r(A),r(B)) \arrow[r] \arrow[dr] & r(B) \arrow[r] \arrow[dr] & \max(r(A),r(B)) \arrow[r] \arrow[ur] & r\left(\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}\right) \arrow[r] & r(A)+r(B) \arrow[d, equal] & r\left(\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}\right) \\
 & & r(A) \arrow[r] \arrow[ur] & r\left(\begin{pmatrix} A & D \\ C & B \end{pmatrix}\right) & & r\left(\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}\right) \arrow[r] \arrow[ur] & r\left(\begin{pmatrix} A & D \\ O & B \end{pmatrix}\right)
\end{tikzcd} \quad . \tag{0.3}$$

注: 可以在另一份练习题中找到部分箭头的取等的充要条件. 如有兴趣, 可以继续总结探究.

**命题** (同时相抵化)**.** 假定矩阵可加, 则 $r(A)+r(B)=r(A+B)$ 的充要条件是 $A$ 与 $B$ 能同时相抵化.

- 假若熟悉线性映射的语言, 则可直接断言存在可逆矩阵 $P$ 与 $Q$ 使得

$$PAQ = \begin{pmatrix} I_{r(A)} & O \\ O & O \end{pmatrix}, \quad PBQ = \begin{pmatrix} O & O \\ O & I_{r(B)} \end{pmatrix}. \tag{0.4}$$

**习题 4.** 设 $A \in \mathbb{F}^{n\times m}$, $B \in \mathbb{F}^{m\times n}$, 则 $AB=O$ 且 $BA=O$ 的充要条件是

- 存在可逆矩阵 $P$ 与 $Q$, 使得

$$PAQ = \begin{pmatrix} I_{r(A)} & O \\ O & O \end{pmatrix}, \quad Q^{-1}BP^{-1} = \begin{pmatrix} O & O \\ O & I_{r(B)} \end{pmatrix}. \tag{0.5}$$

**定义** (广义逆)**.** 记 $A$ 的一个相抵标准型是 $P\cdot\widetilde{I}\cdot Q$. 该相抵标准型对应的广义逆是 $Q^{-1}\cdot\widetilde{I}^T\cdot P^{-1}$.

此处谈论的不是 Moore-Penrose 逆 (有时这也叫广义逆).

*备注.* 既然相抵分解中的 $P$ 与 $Q$ 不唯一, 容易见得广义逆亦不唯一.

**例子.** 若 $AB=O$ 且 $BA=O$, 则 $A$ 存在一个广义逆 $A'$, 满足 $r(A'+B)=r(A)+r(B)$.

**习题 5.** $A$ 与 $B$ 互为广义逆, 当且仅当 $ABA=A$ 且 $BAB=B$.

**命题.** 广义逆在求解线性方程组中的应用 (假定 $Z$ 是 $A$ 的任意一个广义逆):

- $Ax=b$ 有解, 当且仅当 $Zb$ 是一个解; 此时, 线性方程组的所有解是

$$Zb+\mathrm{im}(I-ZA) = \{Zb+(I-ZA)y \mid y \text{取遍所有可乘的向量}\}. \tag{0.6}$$

**习题 6.** 给定 $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{F}^{p\times q}$, 以及 $C \in \mathbb{F}^{m\times q}$. 若 $AY=C$ 与 $ZB=C$ 有解, 则 $AXB=C$ 有解.

## 0.4 Schur 打洞 (Schur 补) 及其推广

USTC 数学系曾有一句戏言: 龙生龙, 凤生凤, 华罗庚的学生会打洞.

**定义** (传统的 Schur 补)**.** 假定 $M := \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ 是分块矩阵, 其中 $A$ 是可逆方阵. 则有初等变换

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} A & B - A\left(A^{-1}B\right) \\ C & D - C\left(A^{-1}B\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & O \\ C & D - C\left(A^{-1}B\right) \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} A & O \\ O & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}. \tag{0.7}$$

特别地, 定义 Schur 补为 $M/A := D - CA^{-1}B$. 这一记号非常顺手, 因为 $\det(M/A) = \det M/\det A$.

**例子.** 实际操作中, $A$ 与 $M$ 未必是方阵. 假若 $C(B) \subset C(A)$ 且 $C(C^T) \subset C(A^T)$, 则可以采用广义逆的方法定义 $M/A$. 细节从略.

**命题.** 以下是广义逆加上 Schur 打洞的一则应用: 给定分块矩阵 (不必是方阵) $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, 其中 $r(M) = r(A)$; 若已知 $(A, B, C)$, 则 $D$ 可以唯一确定.

**例子.** (以上命题的推论) 若 $r(M) = r(F)$, 且 $(B, D, F, G, K)$ 固定, 则 $M$ 唯一决定. 此处

$$M := \begin{pmatrix} A & B & C \\ D & F & G \\ H & K & L \end{pmatrix}. \tag{0.8}$$

备注. 借用以上 "十字引理", 可以编出更多 "好玩的问题".

**例子** (Toy-"snake lemma")**.** 考虑以下分块矩阵:

$$\begin{tikzcd}
\square \arrow[d] & 1 & 1 & 3 & 3 & 5 \\
\# \arrow[r] & \square \arrow[r] & \# \arrow[d] & 3 & 3 & 5 \\
2 & 2 & \square \arrow[d] & 3 & 3 & 5 \\
2 & 2 & \# \arrow[r] & \square \arrow[r] & \# \arrow[d] & 5 \\
4 & 4 & 4 & 4 & \# \arrow[r] & \square
\end{tikzcd} . \tag{0.9}$$

假定 $\square$ 与 $\#$ 是给定的, 数字处是未知的, 且所有 $\#$ 的秩与大矩阵相同, 则大矩阵唯一确定.

**命题.** 四个 Toy-"snake lemma" 可以拼成一个强形式的十字引理.

**例子.** 若 $A$ 与 $M/A$ 均是可逆方阵, 则

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} + A^{-1}B(M/A)^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}B(M/A)^{-1} \\ -(M/A)^{-1}CA^{-1} & (M/A)^{-1} \end{pmatrix}. \tag{0.10}$$

- 以上与 Sherman-Morrison-Woodbury 逆公式 (见习题课) 有何异同之处?

**例子** (“同构定理-丙”). 若遇到好的代数结构, 第一任务是检验四个同构定理 (日后将借用线性空间描述). Schur 补没有很好的乘法结构, 其在形式上仅满足同构定理-丙: 对矩阵

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix} & B \\ C & D \end{pmatrix}, \tag{0.11}$$

总有 $(M/A) = (M/E)/(A/E)$.

习题 **7.** 证明: 若 $A$ 是可逆方阵, 则 $A + BC$ 是可逆方阵当且仅当 $I + CA^{-1}B$ 是可逆方阵.

- 此时能否求出 $A + BC$ 的逆? 可以类比第三次习题课第二题.

*备注.* 矩阵的行, 列可逆变换足以解决相当多的问题, 一般不会大动干戈地使用 Schur 补.

## 0.5 初等变换与秩

**例子.** 行列初等变换 (或可逆变换) 给出

$$\begin{pmatrix} O & AB \\ BC & B \end{pmatrix} \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow \begin{pmatrix} ABC & O \\ O & B \end{pmatrix}. \tag{0.12}$$

从而 $r(AB) + r(BC) \leq r(B) + r(ABC)$. 试问取等的充要条件? (相抵标准型的习题中可找).

1. 若 $B = I_n$, 则 $r(A) + r(C) \leq n + r(AC)$. 这是最为经典的 Silverster-秩不等式.
2. 若 $B \in \mathbb{F}^{m\times n}$, $ABC = O$, 则 $r(A) + r(B) + r(C) \leq m + n$.
3. 若 $A = C$, $B = A^k$, 则 $\left\{r(A^{k+1}) - r(A^k)\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ 是单调递减的数列.
4. 作为推论, 秩序列 $\{r(A^k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ 的任意阶差分都是单调不增的数列.

习题 **8.** 证明 $r\left(\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}\right) = r(A + B) + r(A - B)$. 此处 $A, B \in \mathbb{F}^{m\times n}$.

习题 **9.** 证明 $r(AD - BC) \leq r(A - B) + r(C - D)$. 其中 $A, B \in \mathbb{F}^{m\times n}$, 以及 $C, D \in \mathbb{F}^{n\times l}$.

**例子.** 给定 $A \in \mathbb{F}^{n\times m}$ 与 $B \in \mathbb{F}^{m\times n}$. 对 $\begin{pmatrix} I_m & B \\ A & I_n \end{pmatrix}$ 使用初等变换, 得

$$r(I_m - BA) - m = r(I_n - AB) - n. \tag{0.13}$$

- (如果你学过特征多项式) 将 $I_m$ 换作 $xI_m$, 则 $x^m \cdot \det(xI_n - AB) = x^n \cdot \det(xI_m - BA)$.

日后经常遇见 $m = 1$ 的情况.

习题 **10.** 若 $A^2 = A$ 且 $B^2 = B$, 则 $r(A - B) = r(A - AB) + r(B - AB)$.

- 提示: 考虑 $A - B = A(A - B) - (B - A)B$, 并对 $A(A - B)B = O$ 使用 Silverster-秩不等式.