习题: 矩阵的秩

(2024-2025-1)-MATH1405H-02

Friday 1st November, 2024

目录

0.1 行满秩, 列满射 1

0.2 常用技巧: 完全平方 3

0.3 秩不等式 4

0.4 Schur 打洞 (Schur 补) 及其推广 6

0.5 初等变换与秩 7

0.1 行满秩, 列满射

定理. 将矩阵视作线性映射, 则秩是像的维数. 换言之,

$$r(A) = \dim(C(A)) = \dim(C(A^T)). \tag{0.1}$$

定义 (行满秩)**.** 称 A 是行满秩的, A 的所有行线性无关.

习题 1 (行满秩的等价定义)**.** 使用相抵标准型之类的技巧, 证明以下关于矩阵 A 的命题等价.

1. A 是行满秩的, 即, A 的所有行线性无关.
2. 存在 B 使得 AB 是单位矩阵. 此时, B 称作右逆元.
3. 对任意同规格且允许右乘 A 的矩阵 X 与 Y, 总有 $XA = YA$ 当且仅当 $X = Y$.
4. 对任意可乘的向量 x, $x^T A = 0$ 当且仅当 $x = 0$.
5. 存在矩阵 B (有时 $B = \varnothing$) 使得 $\binom{A}{B}$ 是可逆矩阵.

证明. 证明顺序

$$1 \implies 2 \implies 3 \implies 4 \implies 5 \implies 1. \tag{0.2}$$

1. ($1 \implies 2$) 假定 A 行满秩. 依照阶梯形主元分布, 存在列变换 C 使得 AC 能写作分块矩阵

   $$AC = \begin{pmatrix} S & T \end{pmatrix} \quad S\text{可逆}. \tag{0.3}$$

   此时取 $B = C \cdot \binom{S^{-1}}{O}$ 即可.
2. ($2 \implies 3$) 假定 A 有右逆元 B, 则有推导链:

   $$(X = Y) \implies (XA = YA) \implies (XAB = YAB). \tag{0.4}$$

   从而 $X = Y$ 当且仅当 $XA = YA$.
3. ($3 \implies 4$) 直接地, $x^T A = 0^T A$ 当且仅当 $x^T = 0^T$.
4. ($4 \implies 5$) 翻译 4 为自然语言: 行线性组合为零当切记当线性组合系数为 0. 此时 A 行线性无关. A 能补全作可逆矩阵, 当且仅当其行阶梯形亦然.
5. ($5 \implies 1$) 直接的.

证毕 完明

例子. 假定所有的矩阵乘法式与分块矩阵是合法的. 证明以下问题.

1. 若 A 与 B 行满秩, 则 AB 亦然.
2. 若 AB 行满秩, 则 A 亦然.
3. 若 A 行满秩, 则 $\begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix}$ 亦然.
4. 若 $\binom{A}{B}$ 行满秩, 则 A 与 B 亦然.

5. 分块阵 $\left(\begin{smallmatrix} A & O \\ O & B \end{smallmatrix}\right)$ 行满秩, 当且仅当 A 与 B 均行满秩.

对列满秩矩阵, 上述结论如何变化? (自行检验即可.)

备注. 左乘行满秩矩阵类似满射. 此处的满射是对集合, 交换群, 群, 线性空间等而言的.

1. 若 f 与 g 是满射, 则 $f \circ g$ 亦然.
2. 若 $f \circ g$ 满射, 则 f 亦然.
3. 若 $f_1 : X_1 \to Y$ 是满射, 则对任意 $f_2 : X_2 \to Y$, 复合 $X_1 \sqcup X_2 \xrightarrow{(f_1, f_2)} Y$ 亦然.
4. 若 $\left(\begin{smallmatrix} f_1 \\ f_2 \end{smallmatrix}\right) : X \to Y_1 \times Y_2$ 是满射, 则 f_1 与 f_2 亦然.
5. 略.

类似地, 右乘行满秩矩阵类似单射. 细节从略.

0.2 常用技巧: 完全平方

例子. 此例假定 $\mathbb{Q} \subset \mathbb{F} \subset \mathbb{C}$, 定义 $A^H = (\overline{a_{j,i}})$ 是矩阵的共轭转置. 则

$$N(A) = N(A^H A) = N(AA^H A) = N(A^H AA^H A) = \cdots. \tag{0.5}$$

第一个等式的证明如下:

1. 若 $Ax = 0$, 则 $A^H Ax = 0$; 反之,
2. 若 $A^H Ax = 0$, 则 $x^H A^H Ax = \|Ax\|^2 = 0$, 从而 $Ax = 0$.

每处等式都能归纳地得到.

习题 **2.** 固定数域上的矩阵 A. 称 B 为 "好矩阵", 若 B 是有限个 A 与 A^H 的交错积. 证明任意两个好矩阵的秩相同.

证明. 以上例子表明 $r(A) = r(AA^H) = r((AA^H)^2) = \cdots$. 依照事实 $r(XY) \le r(X)$ 与 $r(A) = r(A^H)$, 任何好矩阵的秩介于 $r(A)$ 与某一 $r((AA^H)^{2^k})$ 间. 从而好矩阵的秩恒等于 $r(A)$. 完证毕明

备注. $A(A - A^H) = O$ 当且仅当 $A = A^H$. 这是另一份文件的习题, 也是 2023 年的第一次小测题.

证明. 转化条件为 $\mathrm{tr}(A^2) = \mathrm{tr}(AA^H)$. 此时

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} a_{j,i} = \sum_{i,j=1}^{n} |a_{i,j}|^2. \tag{0.6}$$

相减得完全平方式 $0 = |a_{i,j} - \overline{a_{j,i}}|^2$, 即, $A = A^H$. 完证毕明

命题. 左乘矩阵不降低零空间的维数, 从而不增加秩.

命题. 若数域上的矩阵满足 $M^2 = O$, 则 $r(M + M^T) = 2 \cdot r(M)$.

- 我们将这一原理及其推广留至内积空间的重要应用: Hodge 分解.

这一结论是 "几何的", 毕竟有限域上处处存在反例.

证明. 考虑初等变换

$$\begin{pmatrix} A + A^T & O \\ O & O \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} A + A^T & O \\ A\left(A^T + A\right) & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A + Q^T & O \\ AA^T & O \end{pmatrix} \overset{\star}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} A + A^T & AA^T \\ AA^T & O \end{pmatrix}, \tag{0.7}$$

以上 $\star$ 处的初等变换是 "将第一列右乘 A^T 再加之第二列".

- 依照不等式 $r\begin{pmatrix} A & O \\ B & C \end{pmatrix} \ge r(A) + r(C)$, 得 $r(A + A^T) \ge 2r(AA^T)$;
- 直接地, $r(A + A^T) \le r(A) + r(A^T)$.

数域的条件表明 $r(A^T A) = r(A)$, 以上两式即 $r(A + A^T) = 2r(A)$.

- 听豌豆说, 这是复旦这几天的考试题.

完证毕明

0.3 秩不等式

习题 3. (Bonus) 以下是秩的比较, 每一箭头朝向秩更大者. 哪些箭头是缺失的? 我没能看出更多.

$$\begin{tikzcd}
 & & & r(A+B) \arrow[r] \arrow[dr] & r((A \quad B)) \arrow[dr] & & \\
r(AB) \arrow[r] & \min(r(A), r(B)) \arrow[r] \arrow[dr] & r(B) \arrow[r] \arrow[dr] & \max(r(A), r(B)) \arrow[r] \arrow[ur] & r\left(\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}\right) \arrow[r] & r(A)+r(B) \arrow[d, equal] & r\left(\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}\right) \\
 & & r(A) \arrow[r] \arrow[ur] & r\left(\begin{pmatrix} A & D \\ C & B \end{pmatrix}\right) & & r\left(\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}\right) \arrow[r] \arrow[ur] & r\left(\begin{pmatrix} A & D \\ O & B \end{pmatrix}\right)
\end{tikzcd} . \tag{0.8}$$

注: 可以在另一份练习题中找到部分箭头的取等的充要条件. 如有兴趣, 可以继续总结探究.

证明. 略. 完证毕明

命题 (同时相抵化)**.** 假定矩阵可加, 则 $r(A)+r(B)=r(A+B)$ 的充要条件是 A 与 B 能同时相抵化.

- 假若熟悉线性映射的语言, 则可直接断言存在可逆矩阵 P 与 Q 使得

$$PAQ = \begin{pmatrix} I_{r(A)} & O \\ O & O \end{pmatrix}, \quad PBQ = \begin{pmatrix} O & O \\ O & I_{r(B)} \end{pmatrix}. \tag{0.9}$$

习题 4. 设 $A \in \mathbb{F}^{n\times m}$, $B \in \mathbb{F}^{m\times n}$, 则 $AB=O$ 且 $BA=O$ 的充要条件是

- 存在可逆矩阵 P 与 Q, 使得

$$PAQ = \begin{pmatrix} I_{r(A)} & O \\ O & O \end{pmatrix}, \quad Q^{-1}BP^{-1} = \begin{pmatrix} O & O \\ O & I_{r(B)} \end{pmatrix}. \tag{0.10}$$

证明. 只证明必要性. 若 AB 与 BA 是零方阵, 取 P_0AQ_0 为 A 的相抵化, 记同规格的分块矩阵

$$P_0AQ_0 = \begin{pmatrix} I & O \\ O & O \end{pmatrix}, \quad Q_0^{-1}BP_0^{-1} = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}. \tag{0.11}$$

此时 $AB=O$ 等价于 $B_1=O$ 且 $B_2=O$; $BA=O$ 等价于 $B_1=O$ 且 $B_3=O$. 再取

$$SB_4T = \begin{pmatrix} O & O \\ O & I \end{pmatrix}. \tag{0.12}$$

以下相抵化即为所求:

$$\begin{pmatrix} I & O \\ O & T^{-1} \end{pmatrix} \cdot P_0 \cdot A \cdot Q_0 \cdot \begin{pmatrix} I & O \\ O & S^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{r(A)} & O \\ O & O \end{pmatrix}, \tag{0.13}$$

$$\begin{pmatrix} I & O \\ O & S \end{pmatrix} \cdot Q_0^{-1} \cdot B \cdot P_0^{-1} \cdot \begin{pmatrix} I & O \\ O & T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & O \\ O & I_{r(B)} \end{pmatrix}. \tag{0.14}$$

完证毕明

定义 (广义逆)**.** 记 A 的一个相抵标准型是 $P\cdot\widetilde{I}\cdot Q$. 该相抵标准型对应的广义逆是 $Q^{-1}\cdot\widetilde{I}^T\cdot P^{-1}$.

此处谈论的不是 Moore-Penrose 逆 (有时这也叫广义逆).

备注. 既然相抵分解中的 P 与 Q 不唯一, 容易见得广义逆亦不唯一.

例子. 若 $AB=O$ 且 $BA=O$, 则 A 存在一个广义逆 A', 满足 $r(A'+B)=r(A)+r(B)$.

习题 5. A 与 B 互为广义逆, 当且仅当 $ABA=A$ 且 $BAB=B$.

证明. 只需证明 $\leftarrow$ 方向. 假定 $A=P\cdot\widetilde{I}\cdot Q$ 是相抵标准型, 则考虑分块

$$B=Q^{-1}\cdot\begin{pmatrix}B_{11} & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{pmatrix}\cdot P^{-1}. \tag{0.15}$$

由题设, $ABA=A$ 且 $BAB=B$.

1. 依分块矩阵计算 $ABA=A$, 得 $B_{11}=O$;
2. 依分块矩阵计算 $BAB=B$, 得

$$\begin{pmatrix}B_{11}^2 & B_{11}B_{12}\\ B_{21}B_{11} & B_{21}B_{12}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B_{11} & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{pmatrix}. \tag{0.16}$$

此时为 B 追加一次相抵标准化, 得

$$\begin{pmatrix}I & O\\ -B_{21} & I\end{pmatrix}\cdot Q\cdot B\cdot P\cdot\begin{pmatrix}I & -B_{12}\\ O & I\end{pmatrix}. \tag{0.17}$$

对 A 使用新的相抵化, $\widetilde{I}$ 不改变. 检验略.

完证毕明

命题. 广义逆在求解线性方程组中的应用 (假定 Z 是 A 的任意一个广义逆):

- $Ax=b$ 有解, 当且仅当 Zb 是一个解; 此时, 线性方程组的所有解是

$$Zb+\mathrm{im}(I-ZA)=\{Zb+(I-ZA)y\mid y\,\text{取遍所有可乘的向量}\}. \tag{0.18}$$

习题 6. 给定 $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$, $B\in\mathbb{F}^{p\times q}$, 以及 $C\in\mathbb{F}^{m\times q}$. 若 $AY=C$ 与 $ZB=C$ 有解, 则 $AXB=C$ 有解.

证明. 考虑 C 的相抵标准型为 $P\widetilde{I}Q$. 此时

$$AY=P\begin{pmatrix}I_r & O\\ O & O\end{pmatrix}Q=ZB. \tag{0.19}$$

因此有

$$A\left(YQ^{-1}\begin{pmatrix}I_r & O\\ O & O\end{pmatrix}P^{-1}Z\right)B=P\begin{pmatrix}I_r & O\\ O & O\end{pmatrix}^3Q=P\begin{pmatrix}I_r & O\\ O & O\end{pmatrix}Q. \tag{0.20}$$

本质上, 此处使用广义逆进行了类似 $MM^{(-1)}M=M$ 的操作. 完证毕明

0.4 Schur 打洞 (Schur 补) 及其推广

USTC 数学系曾有一句戏言: 龙生龙, 凤生凤, 华罗庚的学生会打洞.

定义 (传统的 Schur 补)**.** 假定 $M := \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ 是分块矩阵, 其中 A 是可逆方阵. 则有初等变换

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} A & B - A\left(A^{-1}B\right) \\ C & D - C\left(A^{-1}B\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & O \\ C & D - C\left(A^{-1}B\right) \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} A & O \\ O & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}. \tag{0.21}$$

特别地, 定义 Schur 补为 $M/A := D - CA^{-1}B$. 这一记号非常顺手, 因为 $\det(M/A) = \det M / \det A$.

例子. 实际操作中, A 与 M 未必是方阵. 假若 $C(B) \subset C(A)$ 且 $C(C^T) \subset C(A^T)$, 则可以采用广义逆的方法定义 M/A. 细节从略.

命题. 以下是广义逆加上 Schur 打洞的一则应用: 给定分块矩阵 (不必是方阵) $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, 其中 $r(M) = r(A)$; 若已知 (A, B, C), 则 D 可以唯一确定.

证明. 求解 Schur 补的每一步都可以进行, 最后 $r(M) = r(A) + r(D - CA^{\dagger}B^{-1})$. 此处 $A^{\dagger}$ 是 A 的任意广义逆. 依照题设, $r(D - CA^{\dagger}B^{-1}) = 0$ 是恒成立的, $D = CA^{\dagger}B^{-1}$ 也与 $A^{\dagger}$ 的取值无关, 自然是唯一确定的. 证明完毕

例子. (以上命题的推论) 若 $r(M) = r(F)$, 且 (B, D, F, G, K) 固定, 则 M 唯一决定. 此处

$$M := \begin{pmatrix} A & B & C \\ D & F & G \\ H & K & L \end{pmatrix}. \tag{0.22}$$

备注. 借用以上 "十字引理", 可以编出更多 "好玩的问题".

例子 (Toy-"snake lemma")**.** 考虑以下分块矩阵:

$$\begin{tikzcd} \square \arrow[d] & 1 & 1 & 3 & 3 & 5 \\ \# \arrow[r] & \square \arrow[r] & \# \arrow[d] & 3 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & \square \arrow[d] & 3 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & \# \arrow[r] & \square \arrow[r] & \# \arrow[d] & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & \# \arrow[r] & \square \end{tikzcd}. \tag{0.23}$$

假定 $\square$ 与 $\#$ 是给定的, 数字处是未知的, 且所有 $\#$ 的秩与大矩阵相同, 则大矩阵唯一确定.

证明. 使用上述引理依次补全 $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5$ 即可. 证明完毕

命题. 四个 Toy-"snake lemma" 可以拼成一个强形式的十字引理.

例子. 若 A 与 M/A 均是可逆方阵, 则

$$M^{-1}=\begin{pmatrix}A^{-1}+A^{-1}B(M/A)^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}B(M/A)^{-1}\\ -(M/A)^{-1}CA^{-1} & (M/A)^{-1}\end{pmatrix}. \tag{0.24}$$

- 以上与 Sherman-Morrison-Woodbury 逆公式 (见习题课) 有何异同之处?

例子 (“同构定理-丙”)**.** 若遇到好的代数结构, 第一任务是检验四个同构定理 (日后将借用线性空间描述). Schur 补没有很好的乘法结构, 其在形式上仅满足同构定理-丙: 对矩阵

$$M=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}E & F\\ G & H\end{pmatrix} & B\\ C & D\end{pmatrix}, \tag{0.25}$$

总有 $(M/A)=(M/E)/(A/E)$.

习题 7. 证明: 若 A 是可逆方阵, 则 $A+BC$ 是可逆方阵当且仅当 $I+CA^{-1}B$ 是可逆方阵.

- 此时能否求出 $A+BC$ 的逆? 可以类比第三次习题课第二题.

证明. 草稿: Taylor 展开, 错位相减. 正式证明: 先猜后证. 既然是草稿, 改用小写字母表示 “矩阵”:

$$\begin{aligned}(a+bc)^{-1}&=a^{-1}(1+bca^{-1})^{-1} && (0.26)\\ &=a^{-1}(1-bca^{-1}+bca^{-1}bca^{-1}-\cdots) && (0.27)\\ &=a^{-1}-a^{-1}(bca^{-1}-bca^{-1}bca^{-1}+\cdots) && (0.28)\\ &=a^{-1}-a^{-1}b(1-ca^{-1}b+ca^{-1}bca^{-1}b-\cdots)ca^{-1} && (0.29)\\ &=a^{-1}-a^{-1}b(1+ca^{-1}b)^{-1}ca^{-1}. && (0.30)\end{aligned}$$

此时仅需验证 $(A+BC)^{-1}=A^{-1}-A^{-1}B(I+CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1}$. 左逆验证如下:

$$\begin{aligned}&(A+BC)(A^{-1}-A^{-1}B(I+CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1}) && (0.31)\\ &=I+BCA^{-1}-B(I+CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1}+BCA^{-1}B(I+CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} && (0.32)\\ &=I+BCA^{-1}-B(I-CA^{-1}B)(I+CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} && (0.33)\\ &=I+BCA^{-1}-BCA^{-1}\qquad=I. && (0.34)\end{aligned}$$

后略. 完证毕明

备注. 矩阵的行, 列可逆变换足以解决相当多的问题, 一般不会大动干戈地使用 Schur 补.

0.5 初等变换与秩

例子. 行列初等变换 (或可逆变换) 给出

$$\begin{pmatrix}O & AB\\ BC & B\end{pmatrix}\rightsquigarrow\cdots\rightsquigarrow\begin{pmatrix}ABC & O\\ O & B\end{pmatrix}. \tag{0.35}$$

从而 $r(AB)+r(BC)\le r(B)+r(ABC)$. 试问取等的充要条件? (相抵标准型的习题中可找).

1. 若 $B=I_n$, 则 $r(A)+r(C)\le n+r(AC)$. 这是最为经典的 Silverster-秩不等式.
2. 若 $B\in\mathbb{F}^{m\times n}$, $ABC=O$, 则 $r(A)+r(B)+r(C)\le m+n$.
3. 若 $A=C$, $B=A^k$, 则 $\left\{r(A^{k+1})-r(A^k)\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ 是单调递减的数列.
4. 作为推论, 秩序列 $\{r(A^k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ 的任意阶差分都是单调不增的数列.

习题 8. 证明 $r\left(\begin{pmatrix} A & B\\ B & A\end{pmatrix}\right)=r(A+B)+r(A-B)$. 此处 $A,B\in\mathbb{F}^{m\times n}$.

证明. (假定域的特征不为 2, 也就是存在 $x\in\mathbb{F}$ 使得 $x+x=1$.) 考虑初等变换

$$\begin{pmatrix} A & B\\ B & A\end{pmatrix}\rightsquigarrow\begin{pmatrix} A+B & B+A\\ B & A\end{pmatrix}\overset{2\neq 0}{\rightsquigarrow}\begin{pmatrix} A+B & A+B\\ 2B & 2A\end{pmatrix}\rightsquigarrow$$

$$\begin{pmatrix} A+B & A+B\\ -(A-B) & A-B\end{pmatrix}\rightsquigarrow\begin{pmatrix} 2(A+B) & A+B\\ O & A-B\end{pmatrix}\overset{2\neq 0}{\rightsquigarrow}\begin{pmatrix} 2(A+B) & O\\ O & A-B\end{pmatrix}.$$

若域的特征为 2, 则 $\begin{pmatrix} A & B\\ B & A\end{pmatrix}\rightsquigarrow\begin{pmatrix} A+B & O\\ B & A-B\end{pmatrix}$. 因此, 左式大于 $r(A+B)+r(A-B)$. 取 $A=B=1$ 为 1-阶方阵, 则左式为 1, 右式为 0. 完证毕明

习题 9. 证明 $r(AD-BC)\le r(A-B)+r(C-D)$. 其中 $A,B\in\mathbb{F}^{m\times n}$, 以及 $C,D\in\mathbb{F}^{n\times l}$.

证明. 直接使用秩不等式:

$$r(AD-BC)=r((A-B)D-B(C-D))\le r((A-B)D)+r(B(C-D))\le r(A-B)+r(C-D).\tag{0.36}$$

完证毕明

例子. 给定 $A\in\mathbb{F}^{n\times m}$ 与 $B\in\mathbb{F}^{m\times n}$. 对 $\begin{pmatrix} I_m & B\\ A & I_n\end{pmatrix}$ 使用初等变换, 得

$$r(I_m-BA)-m=r(I_n-AB)-n.\tag{0.37}$$

- (如果你学过特征多项式) 将 I_m 换作 xI_m, 则 $x^m\cdot\det(xI_n-AB)=x^n\cdot\det(xI_m-BA)$.

日后经常遇见 $m=1$ 的情况.

习题 10. 若 $A^2=A$ 且 $B^2=B$, 则 $r(A-B)=r(A-AB)+r(B-AB)$.

- 提示: 考虑 $A-B=A(A-B)-(B-A)B$, 并对 $A(A-B)B=O$ 使用 Silverster-秩不等式.

证明. 一方面, $r(A-AB)+r(AB-B)\ge r(A-B)$. 另一方面, 考虑 $A(A-B)B=O$, 则有

$$0+r(A-B)\ge r(A(A-B))+r((A-B)B)=r(A-AB))+r(AB-B)\tag{0.38}$$

结合 $A^2=A$ 与 $B^2=B$, 完证毕明

例子 (特征为 2 的 "魔咒")**.** 称域的特征为 2, 当且仅当 $1+1=0$. 例如二元域.

- 在相抵标准型的习题中, 对合矩阵 $(A^2=I)$ 的相似标准型一般是 $\begin{pmatrix} I & \\ & -I \end{pmatrix}$; 在特征为 2 的域上, 总有 $(A-I)^2=O$, 因此相似标准型需要做出 "适当的调整".

秩理论的普适性是一把双刃剑: 一方面, 由秩决定的定理无关域的选取; 另一方面, 请思考以下命题.

1. 假定 $A^2=I_n$, 则 $r(A-I)+r(A+I)\leq n$.
2. 假定 $A^3=I_n$, 则 $r(A-I)+r(A)+r(A+I)\leq 2n$.

以上不等式取等, 当且仅当域的特征不为 2 (特别地, 数域).