

2025年10月26日 习题课

1. 线性组合 (带单位的加法运算) 19:06

↓ to define

2. 行(最简)阶梯形 (存在性、唯一性?)

↓ to define

3. 行秩 (不引入秩)

你该如何定义秩

Ex "定义" 有道理吗?

(错误) 整数除以整数

(正确) 对应: 小学 / 计算机

Step 1 类型 = 二元整数组
(type)

$\{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$

"积"

↑

" $\mathbb{Z} - 0$ "

$\{(a, b) \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$

"商"

↓ 等价关系

$(a, b) \sim (c, d)$

当且仅当 $ad = bc$

①

Step 2 性质 四则运算规律.
(properties)

Def (数域) 类型 $\mathbb{Q}$ 的子集, 性质 四则运算继承自 $\mathbb{Q}$
关于四则运算封闭.

Def (实例) 类型 (一个实例) 有理数到
"数" ↓

$$\left(\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall m \geq n \geq N, |x_m - x_n| < \varepsilon \right) \text{ Cauchy 3r}$$
$$(\{x_n\} \sim \{y_n\}) := (x_n - y_n) \rightarrow 0 \quad \text{"同"} \quad \downarrow \quad \text{等价关系}$$

基于 Dedekind 分割的定义 $\Leftrightarrow$ (标准分析) $\mathbb{R}$

性质 11 的逆命题是算子级数自 Cauchy 列的“加减乘除”

Def (线性空间) $\begin{cases} V \text{ 是线性空间} & (x) \\ V \text{ 是数域 } F \text{ 上的线性空间} & (v) \end{cases}$

Eg (Spreadsheet)



分析

线代

大英

2. 省

張三

$$-e^{100}$$
$$r^{20}$$
 $\sqrt{2}$

0

 $\in \mathbb{R}^4$

↓
向量

$\left\{ \begin{array}{l} \underline{Q} \text{ 分析成绩相关性. (内积空间)} \\ \underline{Q} \text{ 主成分分析. (奇异值分析)} \end{array} \right.$

Q 主成分分析

(奇异值分析)



更相关

夏无英

" $\underline{e_g}$ 1 kg , 2 kg , ... $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1\text{ kg} + 2\text{ kg}$ "

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$
$$(v, IF)$$

~~拼音~~

Def V 是 F 线性空间

V 有限维 $\underline{IF}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_i \in \mathbb{F} \right\}$

1 $(V, +, 0)$ 是一个“加法结构”

1-a V 是非空集合, $0 \in V$

映身?

1-b ① 是“两个列一个” (自然语言) 把一个数级变为自身两倍.

$$+ := \left[\begin{array}{ccc} V \times V & \longrightarrow & V \\ (u, v) & \longmapsto & u+v \end{array} \right] + (u, v)$$
 (如数学语言) $\phi: \text{def}$

$$\left[\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ \text{乘法} & & \text{加法} \\ x & \longmapsto & 2x \\ & & \phi(x) \end{array} \right]$$

1-c $(u+v)+w = u+(v+w)$

1-d $(u+0)=u=(0+u)$

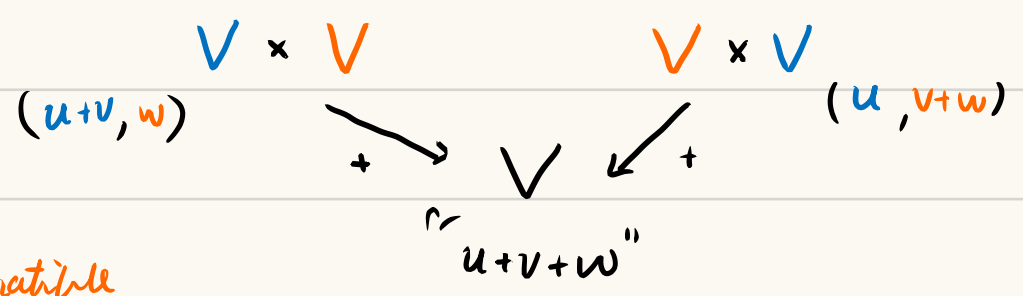
1-e $u+v=v+u$

$$(u, v, w) \xrightarrow{\text{接接号}} (u, v, w)$$

$$(V \times V) \times V \xrightarrow{+ \text{ id}} V \times V \xrightarrow{\text{id} +} V \times (V \times V)$$

2 $(V, +, 0)$ 与 $(\mathbb{F}, +, 0, \cdot, 1)$

有“相容”的关系 compatible



2-a V 中元素可以按 $\mathbb{F}$ 的“拉伸”

$$\bullet \left[\begin{array}{ccc} \mathbb{F} \times V & \longrightarrow & V \\ (\lambda, v) & \longmapsto & \lambda \cdot v \end{array} \right]$$

(自然语言)

(如数学语言)

• 如乘 ($\cong$ 拉伸)

• 域中的乘法.

2-b $(\lambda \cdot \mu) \cdot v = \lambda \cdot (\mu \cdot v)$

2-c $(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$

$\times$ 集合的 Cartesian 积

2-d $\lambda \cdot (u+v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$

CLAIM 今后如域 $\mathbb{F}$ 取定.

(口语描述)
 V 太大了, 能否取小一点的子集,
 $S \subseteq V$, 使得 S 能“表现” V ?

Def (线性组合) $\cong$ 带单程的加法

动机: 用关键信息, 如 S 以表示更多信息.

类型: 从“被”到“以”的过程.

线性空间 V 的子集 S $\rightarrow$ V 中的一个向量.

与一组 $\mathbb{F}$ 中的系数.

性质 $S \subseteq V$ 是子集, (即)

实系数多项式

$\cong$ 常识上, 一个 $\mathbb{R}[x]$ 中的元素, 形如

$$\sum_{i=0}^n a_i \cdot x^i \quad (x^0 = 1)$$

一个 S 中向量线性组合的结果形如有限和

$$C_1 v_1 + \dots + C_n v_n$$

$$C_i \in \mathbb{F}, v_i \in S$$

(不能保证在 $V \setminus S$ 中)

linearly independent
无关

(例子) $\longleftrightarrow$ 具线性

(定义)

$\longleftrightarrow$ 具线性

(问题)

Def (线性独立)

S 线性无关

$\forall v \in S,$
 v 无法被剩余
向量线性表示.

S 不可更小

Remark.

(By false elimination, $\emptyset$ is linearly independent.)

(等价定义)

$\forall S$ 中线性组合式 $\sum_{i \in S} C_i v_i = 0$ $\text{card}(S) < \infty$
则有一切 C_i 为 0.

仅全零组合能得到 0.

结果 0, C 全 0.

Eg $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{F}^2$ (独立)

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{F}^2$ (不独立)

为何?

使用等价定义, 即说明 $\left[a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \right]$ 时
可能有 a, b, c 不全为 0.

Def (矩阵) 的.

Eg $\boxed{a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} + \boxed{b \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} + \boxed{c \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}}_v$

零空间.

$$Ax = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$Av = 0$$

$$N(A) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \mid Ax = 0\}$$

所有 (a, b, c)

$\Leftrightarrow$

$N(A)$ 的元素,

Sheyam 解 $Av=b$, 即, 求解所有使 A -列向量组合为 b 的式子

所谓式子, 一个解 $\iff$ 一种列线性组合系数.

(动机) 如何让求解容易 如何让 A 的列线性关系容易?

$\downarrow$ row reduced echelon form $\text{ref}(A)$

根本出发点

Def (行最简阶梯形). 能 让 A 的列线性关系容易 的东西.

$$A=(v)$$

过程

~~行变换~~

如果 A 只有一列, 则行最简阶梯形何如? 结果, 列线性关系 $\checkmark$

容易证明

$$\begin{cases} \text{(Case I)} & v=0 & \longrightarrow & \text{ref}(v)=0 \\ \text{(Case II)} & v \neq 0 & \longrightarrow & \text{ref}(v)=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \end{cases}$$

$\checkmark$ e.g. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{ref}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{ref}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\checkmark$ 如果 A 有两列 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{v_1, v_2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{v_1, v_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

同上.

$$\underline{v_2 = 2v_1} \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{v_1, v_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{col}_2 = 2 \text{col}_1$$

不换行

$$\text{线性无关} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{v_1, v_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

线性无关.

换行

按列
行

$$\text{ref}(A) \quad \widetilde{A}$$

Alg Input $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ Output a matrix $\widetilde{A} \in \mathbb{F}^{m \times n}$

从左到右逐列地输入 A 的列, $A=(v_1 | v_2 | \dots | v_n) \quad \widetilde{A}=(\widetilde{v}_1 | \dots | \widetilde{v}_n)$

每输入 A 的第 k 列, 则通过运算, 输出 $\text{ref}(A)$ 的第 k 列

输入 A 的第 1 列 v_1

$$\begin{cases} \text{(Case I)} & v_1=0 & \longrightarrow & \widetilde{v}_1=0 \\ \text{(Case II)} & v_1 \neq 0 & \longrightarrow & \widetilde{v}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \end{cases}$$

对于 λ A 的第 2 列 V_2

if ..., otherwise or else

$$\begin{cases} \text{Case I} & V_2 = \lambda V_1 \longrightarrow \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \text{Case II} & \text{otherwise} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

对于 λ A 的第 k 列 V_k

不换行 $\leftarrow$ Case I V_k 能被 $\{V_1, \dots, V_{k-1}\}$ 线性表示, $\rightarrow$ 应当取行列式的组合式

若 $V_k = \sum_{n=1}^{k-1} C_n V_n$, 则 $\tilde{V}_k = \sum_{n=1}^{k-1} C_n V_n$

若 V_k 有两种不同的表示, 则 $\tilde{V}_k$ 唯一吗?

eg. $\text{ref}(A)$ 的前 4 列

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(in A) $V_5 = C_1 V_1 + C_2 V_2 + C_3 V_3 + C_4 V_4 = ? V_1 + ? V_3 \quad ? \cdot ? \text{ 唯一}$

$\# V_2 = ? V_1 \quad ? = 2 \text{ 唯一确定}$

$\# V_4 = ? V_1 + ? V_3 \quad ? = 2, ?' = 3 \text{ 唯一确定}$

换行 $\leftarrow$

Case II V_k 不能被 $\{V_1, \dots, V_{k-1}\}$ 线性表示,

则 $\tilde{V}_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 使得 ref 输入的行数 $\{ \} + 1$

$\Rightarrow \text{ref}(A) =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(换行)
主元列由 Case II 给出
左、上、下均为 0.

$\Rightarrow \text{ref}(A)$ 由 A 通过行变换得到. 即, $\forall A, \exists Q$ 使得 s.t. $A = Q \cdot \text{ref}(A)$

今天学的 $\longrightarrow$ 证明子的

pf. (数学归纳法). 论断是 k 为 "Prop(k)"

$\bullet \forall k$ 列的 $A, \exists Q$ 使得 s.t. $A = Q \cdot \text{ref}(A)$

Step 1 $\text{Prop}(1)$ 成立 $\checkmark$

Step 2 若 $\text{Prop}(k)$ 成立, 则 $\text{Prop}(k+1)$ 成立.

pf. $\forall A, A$ 有 $k+1$ 列. 记为 $(B | v)$
任意 2 个向量.

such that

则 $\exists Q$ 可逆 s.t. $QB = \text{ref}(B)$ (依据 $\text{Prop}(k)$)

$$\Rightarrow QA = (\text{ref}(B) | Qv)$$

Case I v (A 的 $k+1$ 列) 能被 B 的列 (A 的 k 列)

线性表示, 则

Qv 也能被 $\text{ref}(B)$ 以同样的方式线性表示,

$$\text{即. } (B | v) \begin{pmatrix} c \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \xrightarrow{Q \cdot (-)} (\text{ref}(B) | v) \begin{pmatrix} c \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\text{为什么? } - Q(A \begin{pmatrix} c \\ -1 \end{pmatrix}) = (QA) \begin{pmatrix} c \\ -1 \end{pmatrix}$$

Case II v (A 的 $k+1$ 列) 不能被 B 的列 (A 的 k 列)

线性表示. $\Leftrightarrow v$ 不能被 B 中主元列线性表示,

$\Leftrightarrow Qv$ 不能被 $\text{ref}(B)$ 中主元列线性表示

$\Leftrightarrow Qv$ 与 $\text{ref}(B)$ 长得高

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & * & * & * \\ & 1 & & * & * & * \\ & & 1 & * & * & * \\ & & & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \text{ref}(B) \\ Qv \end{array}$$

存在非零元.

$$\xrightarrow{P \cdot (-)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & * & * & * \\ & 1 & & * & * & * \\ & & 1 & * & * & * \\ & & & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \text{ref}(B) \\ Qv \end{array}$$

$$\xrightarrow{P' \cdot (-)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \text{ref}(B) \\ Qv \end{array} \quad \underline{\text{ref}}$$

$$\underline{\underline{\text{Cor}}} \quad \text{ref}(PA) = \text{ref}(A), \quad P \text{ 可逆.}$$

Def (行秩). $r(A) = \text{ref}(A)$ 的非零行数.

Ex $r(A|B) \geq r(A)$

pf. 根据算法, $\text{ref}(A|B) = (\text{ref}(A) | ?)$ #

Ex $r(A \cdot B) \leq r(A)$ 列变换不增加行秩.

pf. $\text{ref}(A) = Q \cdot A$

$\text{ref}(A \cdot B) = \text{ref}(Q \cdot A \cdot B) = \text{ref}(\text{ref}(A) \cdot B)$
的非零行数 的非零行数

$\text{ref}(A) \geq \text{ref}(A) \cdot B$ 的非零行数 #
的非零行数.

Ex $r(A \cdot B) \leq r(B)$ 行变换不增加行秩.

pf. $A \cdot B$ 与 B 列数相同.

对 $A \cdot B$ 与 B 同步进行 $\text{ref}(\cdot)$ 算法.

则 ($\text{ref}(B)$ 在第 k 列不换行 $\rightarrow \text{ref}(A \cdot B)$ 在第 k 列不换行)

$B_k = \sum_{i=k-1} C_i B_i \longrightarrow (A \cdot B)_k = \sum_{i=k-1} C_i (A \cdot B)_i$

$\text{ref}(A \cdot B)$ 比 $\text{ref}(B)$ 更不可能换行. #

Ex $r(A \cdot B) = r(B)$, 则 $\exists C$ s.t. $C \cdot A \cdot B = B$

pf. (按上-问) $\text{ref}(A \cdot B) = \text{ref}(B)$

$Q \cdot A \cdot B \quad P \cdot B$

P, Q 可逆.

$\Rightarrow (P^{-1}Q) \cdot A \cdot B = B$

#

构造

即 A^T 的行秩.

Ex 行秩 = 列秩.

A 的列秩即 列最简阶梯形 的非零列数

p.f. 记 $\text{cef}(A)$ 是 A 的最简列阶梯形.

$$\exists Q \text{ 可逆 s.t. } A \cdot Q = \text{cef}(A)$$

$$\text{因此有 } r(A) \stackrel{\cdot Q}{=} r(\text{cef}(A)) \stackrel{\cdot Q^{-1}}{=} r(A)$$

$$\text{故 } r(A) = \underline{r(\text{cef}(A))}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{ref}(\text{cef}(A)) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

#

I 的阶数 = $\text{cef}(A)$ 的零行之数
= A 的列秩.

$$\underline{\underline{\text{Ex}}} \quad r \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \leq r(A) + r(B)$$

$$\text{p.f.} \quad \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \xrightarrow{\{\}} \begin{pmatrix} \text{ref}(A) \\ \text{ref}(B) \end{pmatrix}$$

$$r \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \text{ref}(A) \\ \text{ref}(B) \end{pmatrix} \leq \underline{\text{ref}(A) \text{ 的零行之数} + \text{ref}(B) \text{ 的零行之数}} = r(A) + r(B)$$

#

logical and

$$\underline{\underline{\text{Ex}}} \quad r \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \geq r(A) \quad r \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \geq r(B) \quad r \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \geq \boxed{\max}(r(A), r(B))$$

p.f. $r(A) = r(A^T)$ 作为最简的 Ex.

也可以将 $r(-)$ 称作列秩.

$$\underline{\underline{\text{Ex}}} \quad r(A | B) \leq r(A) + r(B)$$